

Exercise Set 1

姓名: *** 学号: ***

2019 年 11 月 1 日

1 证明 $\max(r,s)+\min(r,s) = r+s$

证明. 采用案例分析法证明, 存在两种情况:

情况 1. 当 $r \geq s$ 时, $\max(r,s)=r, \min(r,s)=s$, 此时 $\max(r,s)+\min(r,s) = r+s$, 原命题成立

情况 2. 当 $r < s$ 时, $\max(r,s)=s, \min(r,s)=r$, 此时 $\max(r,s)+\min(r,s) = s+r$, 原命题成立

可见, 原命题在所有情形下都成立

2 无理数的无理数次方, 结果是无理数吗? 以 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 为例

证明. 采用案例分析法证明, 存在两种情况:

情况 1. 设 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是有理数. 已知 $\sqrt{2}$ 是无理数, 但是 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 即无理数的无理数次方结果不为无理数

情况 2. 设 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 是无理数. 有 $(\sqrt{2}^{\sqrt{2}})^{\sqrt{2}}$ 的 $\sqrt{2}$ 次方 $= \sqrt{2}^2 = 2$, 已知 $\sqrt{2}$ 和 $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ 均为无理数, 故无理数的无理数次方结果不为无理数.

可见, 无理数的无理数次方, 结果不都为无理数.

3 使用案例分析法证明

$$|r + s| \leq |r| + |s|$$

对所有实数 r, s 成立

证明. 采用案例分析法证明, 存在两种情况:

情况 1. 当 $r+s = 0$ 时, 即 $r = -s$, 此时 $|r+s|=|r|+|s|$

情况 2. 当 $r+s > 0$ 时

情况 2.1. $r > 0, s > 0$. 此时 $|r+s|=|r|+|s|=r+s$

情况 2.2. $r > 0, s < 0$. 此时 $|r+s| = r+s = r-|s|, |r|+|s| = r+|s|$, 易得 $|r|+|s| > |r+s|$

情况 2.3. $r < 0, s > 0$. 此时 $|r+s| = r+s = s-|r|, |r|+|s| = s+|r|$, 易得 $|r|+|s| > |r+s|$

情况 3. 当 $r+s < 0$ 时

情况 3.1. $r < 0, s < 0$. 此时 $|r+s| = -(r+s), |r|+|s| = -r-s$, 易得 $|r+s| = |s|+|r|$

情况 3.2. $r < 0, s > 0$. 此时 $|r+s|=|r|-s, |r|+|s|=|r|+s$, 易得 $|r+s| < |r|+|s|$

情况 3.3. $r > 0, s < 0$. 此时 $|r+s|=|s|-r, |r|+|s|=|s|+r$, 易得 $|r+s| < |r|+|s|$

因此, 对任何实数, 都有

$$|r+s| \leq |r|+|s|$$

4 证明: 存在无理数 a , 使得 $a^{\sqrt{3}}$ 是有理数

证明. 采用案例分析法, 以 $\sqrt[3]{2^{\sqrt{3}}}$ 为例

情况 1. $\sqrt[3]{2^{\sqrt{3}}}$ 是无理数

即设 $a=\sqrt[3]{2^{\sqrt{3}}}$, 因此 $a^{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2^3}=2^1=2$, 2 是有理数.

情况 2. $\sqrt[3]{2^{\sqrt{3}}}$ 是有理数

即设 $a=\sqrt[3]{2}$, 因此 $a^{\sqrt{3}}=\sqrt[3]{2^{\sqrt{3}}}$, 是有理数

因此, 无论 $\sqrt[3]{2^{\sqrt{3}}}$ 是有理数还是无理数, 都存在无理数 a 使得 $a^{\sqrt{3}}$ 是有理数, 原命题得证

5 证明: 对任意 $n>0$, 如果 a^n 是偶数, 那么 a 是偶数

证明. 采用反证法, 假设命题是假的, 即 a^n 是偶数, 那么 a 是奇数, 设 $a=2k+1$

那么 $a^n=(2k+1)^n$. 已知奇数的任意 n 次方必为奇数, 即 a^n 是奇数, 与原命题相矛盾. 因此对任意 $n>0$, 如果 a^n 是偶数, 那么 a 是偶数, 原命题得证.

6 证明: 如果 $a*b = n$, 那么 a 或 b 一定有一个满足 $\leq \sqrt{n}$, 其中 a, b, n 是非负实数.

证明. 采用反证法, 假设 a, b 都 $> \sqrt{n}$

那么 $a*b > \sqrt{n} * \sqrt{n} = n$, 与原命题相矛盾. 因此如果 $a*b = n$, 那么 a 或 b 有一个满足 $\leq \sqrt{n}$, 原命题得证.

7 n 是非负整数,

(a) 解释: 如果 n^2 是偶数—即是 2 的倍数—那么 n 是偶数.

(b) 解释: 如果 n^2 是 3 的倍数, 那么 n 一定是 3 的倍数.

a. 我们证明逆否命题: 如果 n 是奇数, 那么 n^2 是奇数

假设 n 是奇数, 设 $n=2k+1$, $n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1$, 结果为奇数

因此逆否命题成立, 原命题得证.

b. 我们证明逆否命题: 如果 n 不是 3 的倍数, 那么 n^2 不是 3 的倍数. 只有以下两种情况:

第一种情况: 设 $n=3k+1$, 那么 $n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1$, 很明显, n^2 不是 3 的倍数

第二种情况: 设 $n=3k+2$, 那么 $n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4$, 很明显, n^2 也不是 3 的倍数

因此逆否命题成立, 原命题得证。

8 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数

证明. 我们使用反证法证明, 即设 $\sqrt{3}$ 是有理数, 那么我们可以将 $\sqrt{3}$ 写成最简分式: $\frac{n}{m}$

两边同时平方, 得 $3 = \frac{n^2}{m^2}, 3m^2 = n^2$

易知 n 是 3 的倍数, 所以 n^2 是 9 的倍数

又因为 $n^2 = 3m^2$, 故 $3m^2$ 也是 9 的倍数, 即 m^2 为 3 的倍数, 由证明可得 m 也为 3 的倍数

n, m 同时为 3 的倍数, 故 $\frac{n}{m}$ 不可能为最简分式, 与条件相矛盾

故 $\sqrt{3}$ 是无理数, 原命题得证。

9 证明 $\log_4 6$ 是无理数

证明. 我们使用反证法证明, 即 $\log_4 6$ 是有理数, 设 $\log_4 6 = \frac{n}{m}$, $\frac{n}{m}$ 是最简分数。其中 n, m 是整数

有: $4^{\frac{n}{m}} = 6$

有: $4^n = 6^m$

有: $2^{2n-m} = 3^m$

因为 $\log_4 6 > 1$, 所以 $n > m$, 故 $2n-m > 0$ 且 $2n-m$ 为整数

因此左边是偶数, 右边是奇数, 必不相等。故 $\frac{n}{m}$ 并不是最简分式, 与条件矛盾

故 $\log_4 6$ 是无理数, 原命题得证

10 证明 $\log_9 12$ 是无理数

证明. 我们使用反证法证明, 即 $\log_9 12$ 是有理数, 设 $\log_9 12 = \frac{n}{m}$, $\frac{n}{m}$ 是最简分数。其中 n, m 是整数

有: $9^{\frac{n}{m}} = 12$

有: $9^n = 12^m$

有: $3^{2n-m} = 4^m$

因为 $\log_9 12 > 1$, 所以 $n > m$, 故 $2n-m > 0$ 且 $2n-m$ 为整数

因此左边是奇数, 右边是偶数, 必不相等。故 $\frac{n}{m}$ 并不是最简分式, 与条件矛盾

故 $\log_9 12$ 是无理数, 原命题得证

11 证明 $\log_{12} 18$ 是无理数

证明. 我们使用反证法证明, 即 $\log_{12} 18$ 是有理数, 设 $\log_{12} 18 = \frac{n}{m}$, $\frac{n}{m}$ 是最简分数。其中 n, m 是整数

有: $12^{\frac{n}{m}} = 18$

有: $12^n = 18^m$

有: $2^{2n-m} = 3^{2m-n}$

因为 $2n-m, 2m-n$ 均为整数, 故左边不可能等于右边

故 $\frac{n}{m}$ 并不是最简分式, 与条件矛盾。故 $\log_4 6$ 是无理数, 原命题得证

12 如果 k 为正整数, 当且仅当 k 各位数上的总和能被 9 整除, 此时 k 也能被 9 整除

证明. 设 $k = a_n a_{n-1} \dots a_1 a_0$

得 $k = a_n * 10^n + a_{n-1} * 10^{n-1} \dots a_1 * 10 + a_0 * 1$

得 $k = a_n * (10^n - 1) + a_{n-1} * (10^{n-1} - 1) \dots a_1 * (10 - 1) + a_0 * (1 - 1) + a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$

先证充分性, 即当 k 各位数上的总和能被 9 整除, 此时 k 也能被 9 整除。显而易见, 当 k 各位数上的总和能被 9 整除时, $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ 能被 9 整除, 此时 k 也能被 9 整除。

再证必要性, 即当 k 能被 9 整除时, k 各位数上的总和也能被 9 整除。同理, 要想 k 被 9 整除, $a_n + a_{n-1} + \dots + a_0$ 也要能被 9 整除, 即各位数的总和要被 9 整除。

综上, 原命题得证。

13 证明如果 r 是无理数, $\sqrt{r}$ 也是无理数

证明. 我们使用逆否命题来证明, 即 $\sqrt{r}$ 是有理数, r 也是有理数

设 $\sqrt{r} = \frac{n}{m}$ (其中 n, m 均为整数), 则 $r = \frac{n^2}{m^2}$

显而易见, r 必是有理数, 逆否命题得证, 原命题得证。

14 证明 $\sqrt{3}$ 是无理数

证明. 我们用反证法证明, 即假设 $\sqrt{3}$ 是有理数

设 $\sqrt{3}$ 的最简分式为 $\frac{n}{m}$ (n, m 为整数), 两边平方, 得 $3 = \frac{n^2}{m^2}, 3m^2 = n^2$

因此有 n 为 3 的倍数, 故 n^2 为 9 的倍数, 又 $3m^2 = n^2$, 有 m^2 为 3 的倍数, 故 m 也为 3 的倍数
因此为 $\frac{n}{m}$ 不为 $\sqrt{3}$ 的最简分式, 与原假设矛盾, 故 $\sqrt{3}$ 为无理数, 原命题得证。

15 证明: 任意 6 个人中, 总是 3 个人互相认识或互相不认识

证明. 设 6 个人为 A, B, C, D, E, F 六个点, 由 A 出发, 至少存在三个认识或不认识的, 我们不妨设 AB, AC, AD 是认识的。接下来, 如果 BC 或 CD 认识, 则不用证明, 显然存在 3 个互相认识。如果 BC, BD 都不认识, 有两种情况: 1, BD 认识, 则 A, B, D 相互认识; 2. BD 不认识, 则 B, C, D 相互不认识。

原命题得证。